ÉNONCÉ

U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$

. $f : U \to \mathbb{R}^n$ C^1. On suppose que $D_a f$ est inversible.

Alors $\exists\ V, W$ ouverts tels que $a \in V \subset U$, $b = f(a) \in W$ et

$f_{|V} : V \to W$ soit un C^1 difféo. de V sur $W = f(V)$.

→ PREUVE DANS LE CAS $D_0 f = id$, $f(0) = 0$, $a = 0$.

(on peut toujours se ramener à montrer ça quitte à changer f)

LEÇONS.

214

215

RÉFS.

[G] Gourdon analyse p. 321

([FGCD] Rouvière p. 180)

RÉSULTATS ASSOCIÉS

1. $Gl_n(\mathbb{R})$ ouvert
2. Inv est conti.
3. IAF.

DÉMO

: à l'oral.

: écrit au tableau.

: pour comprendre.

BUT : Formellement, pour y donné on cherche x, $y = f(x)$.

IDÉE : Proche de a : $y = f(x) = f(a) + D_a f(x) + o(x) \simeq D_a f(x) + f(a)$

→ f est $\simeq$ égale à sa Dellé. qui est inversible. elle va donc aussi ê inversible.

• $x \simeq D_a f^{-1}(y - f(a))$

Il s'agit de donner un sens au $\simeq$.

↳ Approx successive : $\begin{cases} x_0 = x \\ x_{n+1} = x_n + D_a f^{-1}(y - f(x_n)) \end{cases}$

→ DIRE DANS DÉF. PLAN.

On simplifie hyp :

$f : U \to \mathbb{R}^n$ C^1 $f(0) = 0$, $D_0 f = id$

on peut tjrs s'y ramener.

BUT : $y \in \mathbb{R}^n$. Trouver $x \in U$ tq $f(x) = y$

on va interpréter x ĉ le pt fixe d'1 certaine appli

→ APPLI PT FIXE DE PICARD. ($\mathbb{R}^n$ complet)

Pour $y \in \mathbb{R}^n$, on note $T_y : x \in U \longmapsto y + x - f(x)$. T_y est C^1. (ε C^1).

Et $y = f(x) \Leftrightarrow T_y(x) = x$

PLAN :

1. Mq $\exists R > 0$, W ouvert, $\forall y \in W$, T_y contractante $\overline{B_R} \to B_R$ $B_R = B(0, R)$.
2. Mq $\exists V$ ouvert tq $f : V \to W$ biject
3. Mq f^{-1} conti
4. Mq f^{-1} C^1.

donc différentielle continue. Def.

1. • f est C^1 donc $\exists R>0$, $\overline{B_R} \subset U$ et $\forall x \in B_R$, $\| D_x f - id \| < \frac{1}{2}$ (*)

$T_y : \overline{B_R} \to \overline{B_R}$

$\forall y \in B_{R/2}$ $\forall x \in \overline{B_R}$ → cqfr apres.

• $\| T_y(x) \| = \| y + x - f(x) \| \leq \frac{R}{2} + \|y\|$

$\leq \|y\| + \|x - f(x) - (0 - f(0))\|$ ≤ triag

$\leq \|y\| + \frac{1}{2}\|x\|$ (iAF)

$\leq R$

Pour $y \in B_{R/2}$ fixé, $T_y(\overline{B_R}) \subset B_R$.

$\frac{1}{2}$-lipschitz

De plus, $\forall x \in \overline{B_R}$, $D_x T_y = -D_x f + id$ donc par l'iAF et (*)

$\forall x, z \in \overline{B_R}$, $\| T_y(x) - T_y(z) \| < \frac{1}{2}\|x - z\|$ (T_y est $\frac{1}{2}$ lipschitz donc contract)

2. $\overline{B_R}$ complète (fermé ds $\mathbb{R}^n$ complet)

Donc par th pt fixe de Picard $T_y : \overline{B_R} \to \overline{B_R}$ contractante,

T_y admet un unique point fixe $g(y) = T_y(g(y))$ $\in B_R$

et non $\overline{B_R}$

car T_y à val ds B_R

besoin de restreindre pr avoir $\|y\| < \frac{R}{2}$.

On note $W = B_{R/2}$ $V = B_R \cap f^{-1}(W)$.

. ouvert ↑ im réci appli conti

. vois de 0 car $f(0) = 0$.

On a que $g(y)$ est l'unique antécédent de y par f ds B_R.

On a : $f|_V : V \to W$ bijective d'inverse g.

3. Soit $x_1 = g(y_1)$, $x_2 = g(y_2) \in V$.

BUT : $\| g(y_1) - g(y_2) \| \leq 2\|y_1 - y_2\|$.

$\| x_1 - x_2 \| = \| T_{y_1}(x_1) - T_{y_2}(x_2) \|$ → $g(y_i)$ pt fixe.

$\leq \| T_{y_1}(x_1) - T_{y_1}(x_2) \| + \| T_{y_1}(x_2) - T_{y_2}(x_2) \|$

T_{y_1} $\frac{1}{2}$-contractante $\leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|$ déf : $\| y_1 - x_2 - f(x_2) + x_2 + f(x_2) - y_2 \|$.

Donc $\| g(y_1) - g(y_2) \| \leq 2\|y_1 - y_2\|$ (**) $\left(\frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| \leq \|y_1 - y_2\| \right)$

Donc g est continue.

4.

. Soit $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0) \in W$.

on veut g différentiable. Candidat pr $D_y g = D_x f^{-1}$. on veut donc :

<u>BUT</u> : $D_y g = (D_x f)^{-1}$ ie : $g(y) - g(y_0) = (D_{x_0} f)^{-1} (y - y_0) + o(y - y_0)$

On utilise que f est différentiable

$O() \Rightarrow o()$.

. $y - y_0 = f(x) - f(x_0) = D_{x_0} f (x - x_0) + \underbrace{o(\|x - x_0\|)}_{= o(\|y - y_0\|) \text{ par } (**)}$.

On voudrait isoler $x - x_0$ ie $g(y) - g(y_0)$: besoin inv $D_{x_0} f$.

quitte à réduire V vers de 0.

$D_0 f = id \in Gl_n(\mathbb{R})$ ouvert. Donc par x_0 proche de 0, $D_{x_0} f \in Gl_n(\mathbb{R})$.

$$\underbrace{x - x_0}_{= g(y) - g(y_0)} = (D_{x_0} f)^{-1} (y - y_0) + \underbrace{(D_{x_0} f)^{-1} (o(\|y - y_0\|))}_{o(\|y - y_0\|)}$$

$o(\|y - y_0\|) = \varepsilon(y - y_0) \|y - y_0\|$

avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.

$(D_{x_0} f)^{-1} (\varepsilon(y - y_0) \|y - y_0\|)$

linéarité $= \|y - y_0\| \underbrace{(D_{x_0} f)^{-1} (\varepsilon(y - y_0))}_{\xrightarrow[y \to y_0]{} 0}$ par conti de $(D_0 f)^{-1}$.

Donc g est différentiable en y et

$y \mapsto D_y g = \underbrace{Inv}_{\text{continue}} \circ \underbrace{Df}_{\text{continue}} (\underbrace{g}_{\text{continue}}(y))$ continue comme composée.

Donc g est C^1.

<u>Si le temps</u> :

→ détail simplif

Quitte à considérer $x \mapsto \underbrace{D_0 f^{-1}}_{Df = id} (\underbrace{f(a + x) - f(a)}_{\text{translation}})$, on peut supposer que $a = 0$, $f(a) = 0$ et $D_0 f = id$.